22 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \tan^3 x + \tan x$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0,2]$.
3. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et f^{-1} en précisant les demi tangentes aux extrémités des deux courbes.

b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. En déduire $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

23 On considère la fonction f définie sur $[0,3]$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1,3]. \end{cases}$

1. Vérifier que f est continue sur $[0,3]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0,3]$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a. Expliciter $F(x)$, $x \in [0,3]$.

b. Représenter la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. a. Etudier f.

b. Vérifier que la courbe représentative C_f de f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.

c. Tracer C_f.

2. Pour $x \in [0,1]$ on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Représenter la partie du plan dont l'aire est égale à $F(1)$. En déduire $F(1)$.

3. Pour tout $a \in [0,1]$, on désigne par θ le réel de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos\theta = a$.

a. Montrer que $F(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$.

b. Calculer $F(\frac{1}{2})$, $F(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

25 On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx$.

1. a. Calculer I_0.

b. Vérifier que pour tout n, $0 \le I_{n+1} \le I_n$.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. a. Montrer que pour tout n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

26 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Calculer $\int_1^n f(x)dx$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_1^n f(x)dx \right)$.

2. Soit k un entier naturel non nul.

Calculer $\int_k^{k+1} f(x)dx$.

3. Montrer que la somme $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + ... + \frac{1}{n\times(n+1)}$ converge et déterminer sa limite.

27 On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout entier $n \ge 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1. a. Vérifier que f est décroissante et positive.

b. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn